

GEOMETRIA ALGEBRAICA 2010

EJERCICIOS ADICIONALES C - GEOMETRÍA DEL ESPACIO DE MATRICES

1) Sea K un cuerpo. Consideremos el espacio vectorial $K^{m \times n}$ de todas las matrices $m \times n$ con coeficientes en K . Denotamos $\mathcal{A} = K_{m \times n} = K[x_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n]$ el anillo de polinomios en las mn variables x_{ij} .

La matriz $X = (x_{ij}) \in \mathcal{A}^{m \times n}$ se denomina matriz genérica de $m \times n$.

1) a) Sea $m = n$ y consideremos el determinante de la matriz genérica $\det(X) \in \mathcal{A}$. Es un polinomio homogéneo de grado n en las n^2 variables x_{ij} . Demostrar que es un polinomio irreducible.

Sug.: Usar que, más precisamente, es multilineal.

b) Sea $\Delta = \Delta(n, K) = \{a \in K^{n \times n}, \det(a) = 0\}$. Demostrar que Δ es una hipersuperficie irreducible y que su conjunto de puntos singulares $S(\Delta)$ consiste de las matrices de rango $\leq n - 2$.

2) a) Sea $U \subset K^{n \times n}$ el conjunto de las matrices con autovalores distintos. Demostrar que U es un abierto Zariski denso en $K^{n \times n}$.

Sug.: considerar el discriminante del polinomio característico de la matriz genérica.

b) Deducir el teorema de Cayley-Hamilton.

Sug.: Basta con demostrar el teorema para matrices que pertenecen a cualquier abierto Zariski, lo cual a veces se llama principio de permanencia de identidades algebraicas. Por a), basta con demostrarlo para matrices con autovalores distintos. Reducir al caso de matrices diagonales, donde es claro.

3) Sea G un grupo algebraico (o sea, G es una variedad algebraica y también es un grupo tal que la aplicación de multiplicación y la aplicación de inversa son regulares). Sea X una variedad algebraica y $\alpha : G \times X \rightarrow X$ una acción regular (o sea, α es una acción del grupo G en el conjunto X y es una aplicación regular de variedades).

a) Demostrar que si G es irreducible entonces cada órbita $G.x \subset X$ es irreducible.

Sug.: la imagen de un irreducible es irreducible.

b) Para $x \in X$ denotemos $G_x = \{g \in G, g.x = x\}$ el estabilizador de x . Demostrar que $\dim(G.x) = \dim(G) - \dim(G_x)$.

c) Demostrar que el grupo $\text{GL}(n, K)$ es irreducible.

4) Para subconjuntos $A \subset \{1, \dots, m\}$, $B \subset \{1, \dots, n\}$ sea $X_{AB} = (x_{ij})_{i \in A, j \in B}$ la matriz genérica con filas en A y columnas en B . Si $|A| = |B|$ denotamos

$$\delta_{AB} = \det(X_{AB}) \in \mathcal{A}$$

Para $r \leq \min\{m, n\}$ sea $J_r \subset \mathcal{A}$ el ideal generado por todos los polinomios δ_{AB} con $|A| = |B| = r + 1$. Demostrar:

a) El conjunto de ceros de J_r es el conjunto $\Delta_r \subset K^{m \times n}$ de las matrices de rango $\leq r$.

b) El conjunto cuasi-afín $\Delta(r) = \Delta_r - \Delta_{r-1}$ de las matrices de rango igual a r es irreducible.

Sug.: $\Delta(r)$ es una órbita de $G = \text{GL}(m, K) \times \text{GL}(n, K)$ actuando en $K^{m \times n}$ via $(g, h).a = gah^{-1}$.

c) Δ_r es la clausura Zariski de $\Delta(r)$. Por lo tanto, es un conjunto algebraico afín irreducible.

d) La dimensión de Δ_r es $r(m + n - r)$.

Sug.: correspondencia de incidencia.

e)(*) $\mathcal{I}(\Delta_r) = J_r$.

Comentario: Por el teorema de los ceros de Hilbert (suponiendo K algebraicamente cerrado) esto equivale a decir que J_r es un ideal radical. En virtud de c), también equivale a que J_r es un ideal primo.

(*) Esta parte del ejercicio es más difícil; pueden intentar demostrarla o bien aceptarla y seguir con el resto.

f) El conjunto de puntos singulares $S(\Delta_r)$ es Δ_{r-1} .

Sug.: Usar e) y calcular las derivadas parciales de los δ_{AB} .

5) Sea $N \subset K^{n \times n}$ el conjunto de las matrices nilpotentes. Es un conjunto algebraico afín definido por la ecuación matricial $X^n = 0$. Determinar: ideal, dimensión, componentes irreducibles, singularidades. Similarmente y más en general para $N_k = \{a \in K^{n \times n}, a^k = 0\}$ para cada $k \leq n$.

6) Sea $X = \{(a, b) \in K^{n \times n} \times K^{n \times n} / ab = ba\}$. Demostrar que X es una variedad algebraica irreducible. Calcular su dimensión.

7) Sea $S_n \subset K^{n \times n}$ el conjunto de matrices simétricas. El grupo $\text{GL}(n, K)$ actúa en S_n via $g.a = gag^t$, donde g^t es la matriz traspuesta de g . Para $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$ dar una lista de las órbitas de esta acción (clasificación de formas cuadráticas). Calcular la dimensión de la clausura Zariski de las órbitas. Para cada órbita determinar cuales son las órbitas contenidas en su clausura.

Observación: Para una acción general de un grupo algebraico G en una variedad X , la clausura de una órbita, al ser G -estable, es una unión de órbitas. Si la órbita $G.x$ está contenida en la clausura de $G.y$, se dice que " x es una especialización de y " y escribimos $x < y$ ($<$ es una relación de orden en X).

8) Sea $\alpha \in K^{n \times n}$ una matriz de Jordan (α es una matriz diagonal en bloques, cada bloque es un bloque de Jordan). Denotemos J el conjunto de todas las matrices de Jordan. Para cada $\alpha \in J$ sea $[\alpha] \subset K^{n \times n}$ el conjunto de las matrices semejantes a α . El grupo $G = \text{GL}(n, K)$ actúa en $K^{n \times n}$ via $g.a = gag^{-1}$ y $[\alpha]$ es justamente la órbita de α . La teoría de la forma de Jordan dice que $K^{n \times n}$ es la unión disjunta de los $[\alpha]$ para $\alpha \in J$ (K algebraicamente cerrado).

a) Denotemos $|\alpha|$ la clausura Zariski de $[\alpha]$. Demostrar que $|\alpha|$ es un conjunto algebraico afín irreducible.

b) Determinar la dimensión de $|\alpha|$ para cada $\alpha \in J$.

c) Demostrar que $|\alpha|$ es una unión disjunta de conjuntos $[\beta]$ para ciertos $\beta \in J$ (ver Ej. 7, Observación). Cuáles β aparecen? (o sea, cuáles formas de Jordan son

especialización de una forma de Jordan dada ?) La relación $\beta < \alpha$ si $[\beta] \subset [\alpha]$ es una relación de orden en el conjunto J ; explicitarla.